

Feuille de TD 2 - Ensembles et applications

- Questions de cours.** (a) Donner la définition de l'image directe d'un ensemble par une application.
- (b) Donner la définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application.
- (c) Donner la définition d'une application injective, respectivement surjective, respectivement bijective.
- (d) En utilisant les nombres complexes, donner les équations des translations, rotations et homothéties du plan.
- (e) Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f: E \rightarrow F$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit une bijection. Justifier votre réponse.
- (f) Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E , donner une formule pour le cardinal de $A \cup B$. Justifier votre réponse.
- (g) Soient E et F deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications de E vers F ? Justifier votre réponse.
- (h) Soit E un ensemble fini. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$? Justifier votre réponse.
- (i) Soient $k \leq n$. Combien y a-t-il de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments?
- (j) Donner la définition d'un ensemble dénombrable.

Exercice 1. Soient E un ensemble et A, B des parties de E .

- (a) Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A \cap (A \cap B), \quad A \cup (A \cup B), \quad A \cup (A \cap B), \quad A \cap (A \cup B).$$

- (b) Trouver un ensemble E et trois parties A, B et C de E tels que

$$(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C).$$

Exercice 2. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E .

- (a) Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
- (b) Montrer que $A \cap B = A \cap C$ si et seulement si $A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C)$.
- (c) Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cup C \subset B \cup C$.
- (d) Montrer que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.
- (e) Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cap (E \setminus B) = \emptyset$

Exercice 3. On considère les parties de \mathbb{R} suivantes : $I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$. Trouver un élément de $(I \cup J) \times (I \cup J)$ qui n'appartient pas à $(I \times I) \cup (J \times J)$.

Exercice 4. On considère l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$.

- (a) Déterminer les ensembles

$$(i) f(\emptyset), \quad (ii) f(\{0\}), \quad (iii) f(\{2\}), \quad (iv) f([-2, 3]).$$

(b) Déterminer les ensembles

- (i) $f^{-1}(\emptyset)$, (ii) $f^{-1}(\{-1\})$, (iii) $f^{-1}(\{0, 1\})$,
(iv) $f^{-1}([0, 1])$, (v) $f^{-1}([-2, 3])$.

Exercice 5. On considère l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$.

- (a) Comparer les ensembles $[0, \pi/2]$ et $f^{-1}(f([0, \pi/2]))$.
(b) Comparer les ensembles $[0, 2]$ et $f(f^{-1}([0, 2]))$

Exercice 6. Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

- (a) $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$;
(b) $f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$;
(c) $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;
(d) $f_4: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Exercice 7. Soit $E = [0, 1]$.

- (a) Donner un exemple d'application $f: E \rightarrow E$ non injective et non surjective.
(b) Donner un exemple d'application $f: E \rightarrow E$ non injective et surjective.
(c) Donner un exemple d'application $f: E \rightarrow E$ injective et non surjective.
(d) Donner un exemple d'application $f: E \rightarrow E$ bijective.

Exercice 8. Considérons

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-2}{x+2}.$$

- (a) La fonction f est-elle une application? Comment restreindre f a minima pour avoir une application? Notons f_1 cette restriction.
(b) L'application f_1 est-elle injective? surjective?
(c) Comment restreindre a minima l'espace d'arrivée de f_1 pour avoir une bijection? On appelle f_2 cette bijection.
(d) Donner une formule algébrique pour la réciproque de f_2 .

Exercice 9. Soient f et g les fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ définies par

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est injective mais non surjective.
(b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de g .
(c) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 10. On considère les applications $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ données par

$$f(z) = 2z + i \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z + 3.$$

- (a) Déterminer si f définit une rotation/une homothétie, et calculer le centre et l'angle/le rapport de f le cas échéant.
- (b) Déterminer les ensembles des points invariants des applications $u = f \circ g$ et $v = g \circ f$. L'application u est-elle une rotation/une homothétie? L'application v est-elle une rotation/une homothétie?

Exercice 11. Pour tout nombre complexe t , on définit la transformation

$$f_t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto (t + i)z - 1.$$

- (a) Déterminer pour quelles valeurs de t la transformation f_t est une homothétie, respectivement une rotation, respectivement une translation.
- (b) Supposons $t = 0$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de f_0 suivant que f_0 est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.
- (c) Supposons $t = 2 - i$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de f_{2-i} suivant que f_{2-i} est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.
- (d) Supposons $t = 1 - i$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de f_{1-i} suivant que f_{1-i} est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.

Exercice 12. Soient X, Y deux ensembles et $f: X \rightarrow Y$ une application.

- (a) Rappeler la définition de l'image directe d'un sous-ensemble de X par f et la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble de Y par f .
- (b) Soient $A, B \subset X$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
- (c) Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A, B de X , on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- (d) Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toutes parties A de X , on a $Y \setminus f(A) = f(X \setminus A)$.
- (e) Soient $A, B \subset Y$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, puis que $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 13. Soient X, Y, Z trois ensembles et $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ des applications.

- (a) Rappeler la définition d'une application injective, d'une application surjective.
- (b) Donner l'exemple d'une application injective, d'une application surjective, d'une application ni injective, ni surjective.
- (c) Montrer que :
 - (i) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
 - (ii) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 14. Soient X, Y deux ensembles et $f: X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) f est injective,
- (b) pour tout $a \in X, f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$,
- (c) pour tout $A \in \mathcal{P}(X), f^{-1}(f(A)) = A$.

Indications : On vérifiera d'abord que pour tout $A \in \mathcal{P}(X),$ on a $A \subset f^{-1}(f(A)).$

Exercice 15. Soient X, Y deux ensembles et $f: X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) f est surjective,
- (b) pour tout $b \in Y$, $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$,
- (c) pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Indications : On vérifiera d'abord que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 16. Soient X, Y deux ensembles et $f: X \rightarrow Y$ une application. Soient

$$\varphi: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad B \mapsto f^{-1}(B), \quad \psi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto f(A).$$

(a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injective
- (ii) φ est surjective
- (iii) ψ est injective

(b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est surjective
- (ii) φ est injective
- (iii) ψ est surjective

Exercice 17. Soit E un ensemble ; pour toute partie A de E , on note $\varphi_A: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cap A$ et $\phi_A: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cup A$.

- (a) Montrer que φ_A est injective si, et seulement si, φ_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.
- (b) Montrer que ϕ_A est injective si, et seulement si, ϕ_A est surjective si, et seulement si, $A = \emptyset$.

Exercice 18. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = \mathbf{1}_E$. Montrer que f est bijective et exprimer sa bijection réciproque.

Exercice 19. Soient E et F deux ensembles finis. On note $m = \# E$ (resp. $n = \# F$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Déterminer le nombre d'injections de E dans F . Puis déterminer le nombre de bijections de E sur F .

Exercice 20. Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, \mathbb{Q} , $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, \mathbb{R} sont-ils dénombrables ? Justifier votre réponse.